概率论与数理统计练习题

一、填空题

1、设 A, B, C 是三个事件，且 P(A)=0.7, P(B)=0.3, P(A-B)=0.5, 则 $P(\overline{A}B)=$ ____________ ,

$P(\overline{AB})=$ ____________ .

2、设事件 A,B 互不相容，且 P(A)=p, P(B)=q, 则 $P(\mathrm{A}\cup B)=$ ____________ ，

$P(A\overline{B})=$ ____________ $P(\overline{A}\overline{B})=$ ____________ .

3、设 A,B,C 为三事件，则事件 A,B,C 中恰有一个发生可表示为__________________，A,B,C 至少有一个发生可表示为__________________。

4、设每次试验成功的概率为 *p (0<p<1),* 则在 3 次重复试验中至少失败一次的概率为__________________.

5、已知 8 只产品中有 2 件次品，从中不放回地抽取两次，每次取一只，则第二次取出的是次品的概率为__________________.

6、设在 n 张彩票中有一张奖券，则第二人摸到奖券的概率为__________________.

7、设随机变量X的分布函数为：$F(x)=\begin{cases}0, & x<0\\ \frac{1}{3}, & 0\le x<1\\ \frac{1}{2}, & 1\le x<2\\ 1, & x\ge 2\end{cases}$，则随机变量$X$的分布列为____.

8、设 X 服从泊松分布，且已知 P(X=1)=P(X=2),则 P(X=4)=_______________________.

9、已知随机变量 X,Y 相互独立，且 $X\sim\pi(1)$，$\mathrm{Y}\sim\pi(2)$, 则 X+Y~_______, P(X+Y=4)=_________.

10、若随机变量 X、Y 相互独立，且 $X\sim \mathrm{b}(3,0.35), \mathrm{Y}\sim b(6,0.35)$，则 k=_________时，概率 $P(\mathrm{X+Y=k})$ 取到最大值。

11、已知 X 服从参数为λ=4 的指数分布，则 $E(X^2)=$ ______, $P(\mathrm{X}>E(X))=$ ______.

12、若随机变量 $(X,Y)\sim N(2,-1,3,6,0)$, $Z=X+Y$，则 $P(-2\le \mathrm{Z}\le 4)=$ ________.

13、设两个相互独立的随机变量 X 和 Y 分别服从正态分布 $\mathrm{N}(1,2)$ 和 $\mathrm{N}(0,1)$，则 $P(X+Y\le 1)=$ ____________

14、设 $X\sim N(2,\sigma^2)$ 且 $P(2<X<4)=0.3$，则 $P(X\ge 4)=$ ____________ , $P(X<0)=$ _______.

15、X 与 Y 是两个相互独立的随机变量，分布函数分别为 $F_X(x),\ F_Y(y)$，则 Z=max(X,Y)的分

布函数 $F_Z(z)=$__________，$P(\min\{X,Y\}\le 3)=$________.

16、设随机变量 X 的数学期望 $E(X)=a, E(X^2)=b, c$ 为一常数，则 $D(cX)$=_____________.

17、 已知随机变 X 服从区间 [a,b]上的均匀分布,且 $E(X)=3, D(X)=\dfrac{4}{3}$, 则区间[a,b]=_______.

18、设总体 X 服从正态分布 $N(\mu,1), (X_1,X_2,\cdots,X_n)$ 为来自该总体的一个样本, 则

$\sum_{i=1}^{n}(X_i-\mu)^2$ 服从____________分布。

19、设随机变量 X 具有数学期望 $E(X)=\mu$, 方差 $Var(X)=\sigma^2$，则由切比雪夫不等式，

对 $\forall\varepsilon>0$, 有 $P(|X-\mu|<\varepsilon)>$____________.

20、若随机变量X服从$[-1, b]$上的均匀分布, 且有切比雪夫不等式

$P(|X-1|<\varepsilon)\ge\dfrac{2}{3}$, 则b=________, $\varepsilon=$____________.

21、设 $X\sim N(4,9)$，$Y\sim N(-3,4)$，且 $\boldsymbol{X}$ 与 $\boldsymbol{Y}$ 独立，则 $2X-Y\sim$______________；

$D(3X+2Y-7)=$_____________.

22、二维随机变量(X,Y)具有概率密度为 $f(x,y)$，则 X 的边缘密度函数 $f_X(x)=$______________.

23、设 X、Y 为两个随机变量，已知 $D(X)=1, D(Y)=4, Cov(X,Y)=1$，则 X 与 Y 的相关系数 $\rho_{XY}=$______________.

24、设随机变量 X 和 Y 独立同分布，都服从标准正态分布 N(0,1)，U=X+Y,V=X-Y,则 U 和 V 的相关系数 $\rho_{XY}=$______________.

25、若随机变量(X,Y)的协方差矩阵为 $\begin{pmatrix}1 & 3\\ 3 & 16\end{pmatrix}$，则 $D(X\text{-}Y)$= ________,

$Cov(X+2Y, X-Y)=$____.

26、设 $X_1,X_2,\cdots X_{600}$ 相互独立，且均在 (0, 1) 上服从均匀分布，则由中心极限定理有 $\boldsymbol{P}\left(\sum_{i=1}^{600}X_i>300\right)\approx$______________

27、正态分布 $N(3,\sigma^2)$ 的中位数 $\boldsymbol{x_{0.5}}=$______________.

28、 设总体 X～N（1,4），$X_1,\cdots X_{100}$ 是来自 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，已知

$Y = a\overline{X} + b \sim N(0,1)$, a>0, 则 a=___________, b=__________.

29、 当随机变量 $t \sim t(n)$ 时，称满足 $P(t \geq t_\alpha(n)) =$_______的 $t_\alpha(n)$ 是自由度为 n 的 t 分布的上 α 分位数.

30、设 $X_1,\cdots X_{10}$ 是取自正态总体 $N(0,0.3^2)$，则 $P(-1.2 < \overline{X} < 1.5) =$_____

$E(\overline{X}) =$_____, $D(\overline{X}) =$______, $E(S^2) =$_____，$\mathrm{D}(S^2) =$_____.

$P(\frac{1}{2} \times 0.3^2 < \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10}(X_i - \overline{X})^2 < 2 \times 0.3^2) =$_______. （查表计算）

31、设 $X_1,\cdots X_4$ 是取自正态总体 $N(0,2^2)$ 的简单随机样本，则 $a =$_____, $b =$_____ 时，

$Y = a(X_1 - 2X_2)^2 + b(3X_3 - 4X_4)^2$ 服从 χ^2 分布，自由度为_____。

32、设随机变量 $X \sim t(n)$, $(n>1)$, 则 $X^2 \sim$________, $\frac{1}{X^2} \sim$________

33、若 $X_1,\cdots X_4$ 是取自正态总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本，则随机变量 $\frac{X_1+X_2}{\sqrt{X_3^2+X_4^2}} \sim$___.

34、 设总体 X 服从正态分布，且 $E(X) = -1$, $E(X^2) = 4$, $X_1, X_2, \cdots X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本，则样本均值 $\overline{X} \sim$__________.

35、 设总体 X～N（1,4），$X_1,\cdots X_{100}$ 是来自 X 的简单随机样本，$\overline{X}$ 为样本均值，则 $\overline{X} \sim$__________.

36、设 $X_1,\cdots X_{16}$ 是来自 N(8,4)的简单随机样本，则 $p(\min\{X_1, X_2\cdots X_{16} > 5) =$________;

$p(\max\{X_1, X_2\cdots X_{16}\} > 10) =$_____________.

37、 设 $X_1, X_2,\cdots X_{21}$ 与 $Y_1, Y_2,\cdots Y_5$ 分别取自两个独立正态总体 N(1,4) 与 N (2，1)，S_1^2 与 S_2^2 分别是两个样本的样本方差，令 $K_1 = aS_1^2, K_2 = (a+b)S_2^2$，已知 $K_1 \sim \chi^2(20)$, $K_2 \sim \chi^2(4)$, 则 a=_________, b=__________

38、设总体 X 和 Y 相互独立且都服从正态分布总体 N（0，9），而 $X_1, X_2,\cdots X_9$ 和 $Y_1, Y_2,\cdots Y_9$

分别来自 X 和 Y 的简单随机样本,则统计量 $U=\dfrac{\sum_{i=1}^{9}X_i}{\sqrt{\sum_{j=1}^{9}Y_j^2}}$ 服从________分布,自由度为___.

39、设总体 X 服从正态分布, $N(\mu,\sigma^2)$， X_1,X_2,X_3 为其样本,则当常数 $a=$______

时, $\overset{\wedge}{\mu}=\dfrac{1}{3}X_1+aX_2+\dfrac{1}{6}X_3$ 是未知参数 μ 的无偏估计.

40、设$X_1,X_2,...,X_n$为总体 X 的一个随机样本，$E(X)=\mu, D(X)=\sigma^2$,

$\hat{\theta}^2=C\Sigma_{i=1}^{n-1}(X_{i+1}-X_i)^2$为$\sigma^2$的无偏估计，则 C=___________________

41、对任一总体而言，样本方差 $S^2=$____________是总体方差 σ^2 的无偏估计.

42、.若参数 θ 有两个无偏估计 $\hat{\theta}_1$和$\hat{\theta}_2$,它们的方差对一切 $\theta\in\Theta$ 有 $D(\hat{\theta}_1)$ ____ $D(\hat{\theta}_2)$，则称估计 $\hat{\theta}_1$ 较 $\hat{\theta}_2$ 有效.

43、 设 $\theta\in\Theta$ 为未知参数，$\hat{\theta}_n=\theta_n(x_1,\cdots,x_n)$ 是 θ 的一个估计量，n 是样本容量，若对任何一个 ε >0, 有 $\lim\limits_{n\to+\infty}P\{|\theta_n-\theta|>\varepsilon\}=0$，则称 $\hat{\theta}_n$是参数 θ 的________估计

44、设总体 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases}e^{-(x-\theta)} & x\geq\theta \\ 0 & 其它\end{cases}$, 且 $X_1,\cdots X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本，则未知参数 θ 的矩估计量为____________________.

45、设总体$X\sim B(n,p),0<p<1,X_1,X_2,...,X_n$ 为其子样, n 及 p 的矩估计分别是_____

46、设总体$X\sim U(0,\theta),(X_1,X_2,...,X_n)$是来自 X 的样本, 则$\theta$的极大似然估计量是______

47、设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$， μ,σ^2 为未知参数, $X_1,\cdots X_n$ 是取自正态总体 X 的简单随机样本, $\overline{X},S^2$ 分别是样本均值和样本方差, 则均值 μ 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为_______.

48、设总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$， $X_1,\cdots X_n$ 是取自 X 的简单随机样本， 则方差 σ^2 的置信水平为 $1-\alpha$ 的置信区间为___________________.

49、设总体$X\sim N(\mu,0.9^2)$容量为 9 的简单随即变量，均值 $\overline{x}=5$，则未知参数μ的置信度为 0.95 的置信区间是 ___________ (已知 $u_{0.025}=1.96$)

50、在假设检验中，记H_0为原假设，H_1为备择假设，则称_______为犯第一类错误.

51、设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，$X_1,\cdots X_n$是来自总体 X 的样本，则检验假设$H_0:\mu=\mu_0$，$H_1:\mu\neq\mu_0$，当σ^2为已知时用统计量是______________________；当σ^2未知时检验统计量是_________________。

52、设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2为未知参数，从X中抽取的容量为n的样本，样本均值为$\overline{X}$，样本方差为S^2，在显著性水平α下，检验假设$H_0:\mu=80$，$H_1:\mu\neq 80$的拒绝域为_______________.

53、 设总体$X \sim N(\mu,\sigma^2)$，μ,σ^2均未知，$X_1,\cdots X_n$是来自总体 X 的样本，假设$H_0:\sigma^2=\sigma_0^2$, $H_1:\sigma^2\neq\sigma_0^2$所使用的统计量是___________________．若给定显著性水平α，则拒绝域为_________________.

二、计算和证明题

1．两台车床加工同样的零件，第一台出现不合格品的概率为 0.03，第二台出现不合格品的概率为 0.06，加工出来的零件放在一起，并且已知第一台加工的零件比第二台加工的零件多一倍。 (1) 求任取一个零件是合格品的概率；

(2) 如果取出的零件是不合格品，求它是由第二台车床加工的概率。

2、口袋中装有 10 枚硬币，其中 4 枚废品（即两面都是国徽），先从口袋中随机的取出一枚硬币，并将它独立的抛两次，（1）求向上的一面全是国徽的概率；（2）若发现向上的一面全是国徽，求这枚硬币是废品的概率。

3、设随机变量 X~U(0,3),求随机变量$Y=X^2$的概率密度函数

4、设 X 与 Y 独立，且 X～U(0,1)，Y 的密度函数为 $f_Y(y)=\begin{cases} e^{-y} & y>0 \\ 0 & y\le 0 \end{cases}$.

求 $Z=X+Y$ 的密度函数.

5、设随机变量 X 的密度函数为 $f(x)=\begin{cases} A\cos x & -\dfrac{\pi}{4}\le x\le \dfrac{\pi}{4} \\ 0 & \text{其它} \end{cases}$

（1）求系数 A;（2）求 X 的分布函数 F(x);（3）求概率 $P(0<X<\dfrac{\pi}{4})$。

6、设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} e^{-y}, & 0<x<y \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(1) 求 $f_X(x)$， $f_Y(y)$；并判断 X 与 Y 是否独立.

(2) 求 $E(X),E(Y),Cov(X,Y)$；并判断 X 与 Y 是否相关.

7、设二维随机变量 (X,Y) 的联合密度函数为 $f(x,y)=\begin{cases} 6, & 0<x<1，x^2<y<x \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$

(1) 求 $f_X(x)$， $f_Y(y)$；并判断 X 与 Y 是否独立.

(2) 求 $E(X),E(Y),Cov(X,Y)$ $E(\dfrac{X}{\sqrt{Y}})$；并判断 X 与 Y 是否相关.

8、设二维连续随机变量(X,Y)的联合密度函数为

$$f(x,y)=\begin{cases}\frac{21}{4}x^2y & x^2\le y\le 1\\ 0 & 其他\end{cases}$$

⑴ 求条件密度函数 $f(y|x)$． ⑵ 求条件概率 $p(Y\ge 0.75|X=0.5)$．

9．根据以往经验，某种电器元件的寿命服从均值为 100 小时的指数分布．现随机地取 16 只，设它们的寿命是相互独立的．求这 16 只元件的寿命的总和大于 1920 小时的概率．(已知 $\Phi(0.8)=0.7881$)

10. 设总体 X 服从参数为 λ 的泊松分布，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 是来自总体 X 的一个简单随机样本，$\overline{X},S^2$ 分别是样本均值和样本方差。（1）求样本 $X_1,X_2,\cdots X_n$ 的联合分布律；

（2）求 $\sum_{i=1}^{n}X_i$ 的分布律；（3）求 $E(\overline{X}),\mathrm{D}(\overline{X}),E(S^2)$

11、设总体 X 的密度函数为 $f(x,\ \theta)=\begin{cases}(\theta+1)\mathrm{x}^{\theta} & 0<x\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$，$\theta>-1$ 未知，$X_1,X_2,\cdots X_n$ 是取自总体 $\boldsymbol{X}$ 的样本，$x_1,x_2,\cdots x_n$ 为相应的样本值，求参数 θ 的矩估计量和最大似然估计量.

12、设总体 $X \sim N(2,\sigma^2)$，它的概率密度函数为 $f(x;\sigma^2)=\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp\left(-\dfrac{x^2}{2\sigma^2}\right)$

其中 σ^2 为未知参数. 设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是来自总体 X 的一个样本

（1）求 σ^2 的极大似然估计量 σ_1^2；　　　　（2）求 σ^2 的矩估计量 σ_2^2.

（3）证明 σ_1^2 是 σ^2 的无偏、相合估计；

13．设总体 $\boldsymbol{X}$ 的概率分布为

X	0	1	2	3
P	θ^2	$2\theta(1-\theta)$	θ^2	$1-2\theta$

其中 $\theta(0<\theta<0.5)$ 是未知参数，利用总体 $\boldsymbol{X}$ 的如下样本值 3，1，3，3,　0，1，2，3，求 $\boldsymbol{\theta}$ 的矩估计值和最大似然估计值。

14.从一批灯泡中随机抽取 5 只作寿命试验，测得寿命 X（单位：小时）如下：

1050，1100，1120，1250，1280

设灯泡寿命服从正态分布.　求均值 μ 的置信水平为 0.95 的单侧置信下限 。　　　　.

（$t_{0.05}(4)=2.132,\ t_{0.025}(4)=2.776$）

15.某种零件的长度服从正态分布，方差$\sigma^2=1.21$，随机抽取6件，记录其长度（毫米）．32.46，31.54，30.10，29.76，31.67，31.23　　问：当显著性水平$\alpha=0.01$时，能否认为这批零件的平均长度为32.50毫米．

16.从某种试验物中取出 24 个样品，测量其发热量，算得平均值$\bar{x}=11958$，样本均方差$S=316$．设发热量服从正态分布，问是否可认为该试验物发热量的期望值为 12100（$\alpha=0.05$）．

17.设某次考试的学生成绩服从正态分布，从中随机的抽取36位考生的成绩，算得平均成绩为 66.5，标准差为 15 分．(1) 问在显著水平$\alpha=0.05$下，是否可以认为这次考试全体考生的平均成绩为 70 分？(2) 在显著水平$\alpha=0.05$下，是否可以认为这次考试考生的成绩的方差为16^2？